PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE 2001

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre cuatro.

OPCIÓN A

1º) Demostrar que, para cualquier valor real de m, la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ no tiene dos raíces diferentes que pertenezcan al intervalo [0, 1].

Considerando la función $f(x) = x^3 - 3x + m$, que por ser polinómica es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo real de su dominio.

Según el Teorema de Bolzano: "Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

Teniendo en cuenta que $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1),\ \forall x (0,\ 1) \Rightarrow f'(x) < 0$, lo que significa que en el intervalo considerado la función es monótona decreciente, es decir: que, si tiene alguna raíz, tiene que ser única.

Dependiendo del valor de m y considerando la función en el intervalo (0, 1):

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = m \\ \\ f(1) = 1 - 3 + m = m - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Si\ \ m < 2 \Rightarrow \underline{f(x) < 0} \\ \\ Si\ \ 0 < m < 2 \Rightarrow \underline{f(0) < 0 < f(1)} \\ \\ Si\ \ m > 2 \Rightarrow \underline{f(x) > 0} \end{array}\right.$$

De lo anterior se deduce que para $\begin{cases} \underline{|m| > 2 \;\; \Rightarrow \;\; Ninguna \;\; raíz \;\; real}. \\ \underline{|m| < 2 \;\; \Rightarrow \;\; Una \;\; raíz \;\; real} \end{cases}$

<u>En ningún caso la ecuación tendrá dos raíces reales en el intervalo [0, 1], c.q.d.</u>

****

2º) De los planos paralelos al plano $\pi \equiv x+y+z=8$, encontrar los que determinan con los ejes de coordenadas un triángulo de área $S=8\sqrt{3}\ u^2$.

Los planos paralelos a $\pi \equiv x+y+z=8$ son de la forma $\alpha \equiv x+y+z=D$.

Los puntos de corte del plano α con los diferentes ejes coordenados son:

$$X \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A(D,\ 0,\ 0)\ ;;\ Y \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(0,\ D,\ 0)\ ;;\ Z \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow C(0,\ 0,\ D)$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ D,\ 0)-(D,\ 0,\ 0)=(-D,\ D,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ D)-(D,\ 0,\ 0)=(-D,\ 0,\ D)$$

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores y el área del paralelogramo, a su vez, es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, por lo cual:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=8\sqrt{3}\ ;;\ \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -D & D & 0 \\ -D & 0 & D \end{matrix}\right\|=8\sqrt{3}\ ;;\ \frac{D^2}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=8\sqrt{3}\ ;;$$

$$D^2\cdot\left|i+k+2j\right|=16\sqrt{3}\ ;;\ D^2\cdot\left|i+2j+k\right|=16\sqrt{3}\ ;;\ D^2\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}=16\sqrt{3}\ ;;$$

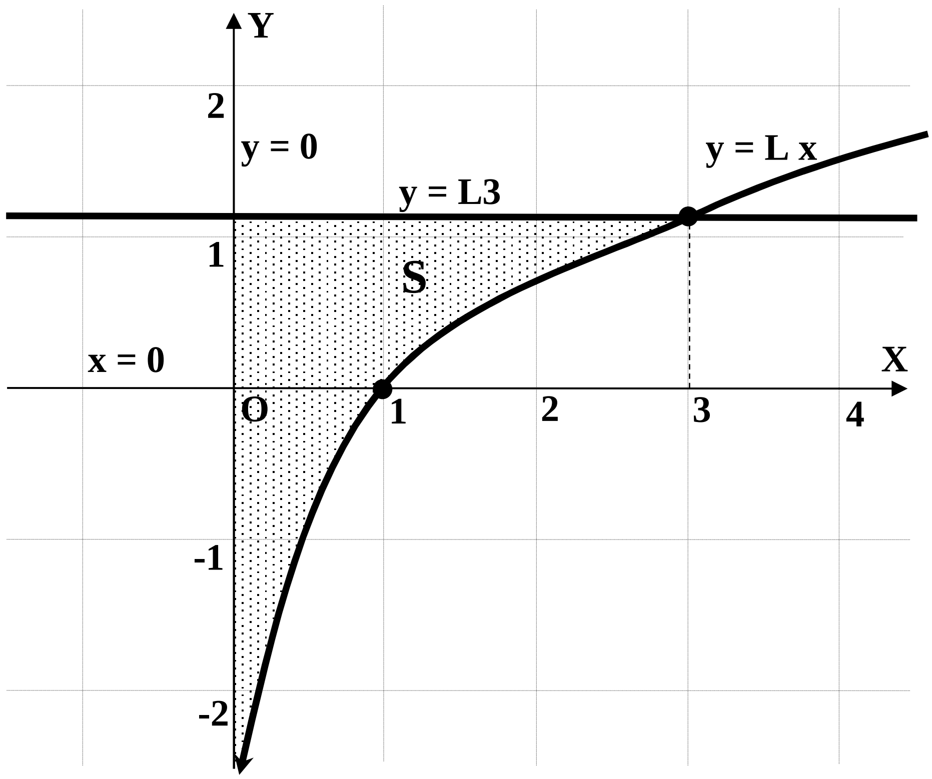
$$D^2\cdot\sqrt{6}=16\sqrt{3}\ ;;\ D^2=\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}=\sqrt{128}\ ;;\ D=\pm\sqrt[4]{128}=\pm\sqrt[4]{2^7}=\underline{\pm 2\sqrt[4]{8}=D}$$

Los planos pedidos son:

$$\underline{\underline{\alpha_1 \equiv x+y+z+2\sqrt[4]{8}=0}}\ ;;\ \underline{\underline{\alpha_2 \equiv x+y+z-2\sqrt[4]{8}=0}}$$

****

3º) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = L\,x$ y las rectas y = 0, $y = L\,3$ y x = 0.



La representación gráfica de la situación en la expresada en el gráfico, donde puede observarse que todas las ordenadas de la recta y = L 3 son mayores que las de la curva y = L 3.

$$S = \int_0^3 \left(L\,3 - L\,x\right) \cdot dx = \int_0^3 L\,3 \cdot dx - \int_0^3 L\,x \cdot dx = L\,3 \cdot \int_0^3 dx + \int_3^0 L\,x \cdot dx = L\,3 \cdot I_1 + I_2 \quad (*)$$

$$I_1 = \int_0^3 dx = [x]_0^3 = 3 - x = \underline{3\,u^2 = I_1}$$

$$I_2 = \int_0^3 L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{\int udv = uv - \int vdu\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} L\,x = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \left[L\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right]_3^0 = \left[x\,L\,x - \int dx\right]_3^0 = \left[x\,L\,x - x\right]_3^0 = \left[x\left(L\,x - 1\right)\right]_3^0 =$$

$$= 0 \cdot \left(L\,0 - 1\right) - \left[3 \cdot \left(L\,3 - 1\right)\right] = \underline{A - 3L\,3 + 3 = I_2 \quad (**)}$$

Para poder calcular el valor de la expresión A para x = 0 tenemos que recurrir al límite:

$$A = \lim_{x \to 0} \left[x \cdot \left(L\,x - 1 \right) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{L\,x - 1}{\frac{1}{x}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \left\{ L'\,Hopital \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} x = \underline{0 = A}$$

Sustituyendo en (**) resulta: $I_2 = 3 - 3L\,3 = \underline{3\left(1 - L\,3\right)\,u^2 = I_2}$.

Sustituyendo en (*) los valores de I_1 e I_2, resulta:

$$S = L\,3 \cdot I_1 + I_2 = L\,3 \cdot 3 + 3 - 3L\,3 = \underline{\underline{3\,u^2 = S}}$$

****

4º) Resolver el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{cases}$ cuando sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado los rangos de ambas matrices tienen que ser iguales y menor que el número de incógnitas.

Como es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$, el rango de ambas matrices tiene que ser dos.

Vamos a determinar el valor de k que tiene que cumplir la condición:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 12+20+k-3k-10-8=14-2k=0 \;;;\; \underline{k=7}$$

$$Para\ \ k=7 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1+C_3=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2,\ c.q.c.}$$

Para k = 7 resulta el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ 7x+10y+4z=11 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones y parametrizando una de las incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y=2-\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -2x-2y=-4+2\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1+\lambda}$$

$$x+y=2-\lambda \;;;\; x=2-\lambda-y=2-\lambda+1-\lambda=\underline{3-2\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda,\quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Demostrar que existe al menos un valor real de x para el cual se verifica la siguiente igualdad: $sen\ x = x - 2$.

Considerando la función $f(x) = sen\ x - x + 2$, que es continua en R, por ser la sma de tres funciones continuas en R, por lo cual se le puede aplicar el Teorema de Bolzano a cualquier intervalo real que se considere.

Considerando el intervalo $[0,\ \pi]$, en el cual se cumple que:

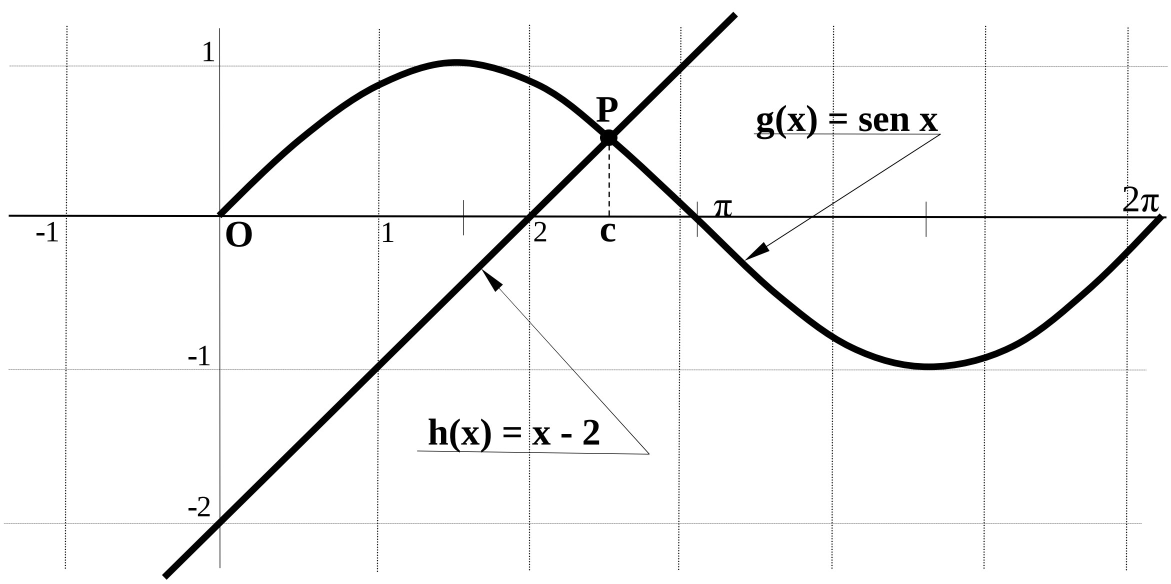
$$f(0) = sen\ 0 - 0 + 2 = 0 + 2 = 2 > 0$$

$$f(\pi) = sen\ \pi - \pi + 2 = 0 - \pi + 2 = 2 - \pi < 0$$

De lo expuesto anteriormente se deduce que la ecuación $sen\ x = x - 2$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $[0,\ \pi]$, c.q.d.

Gráficamente también se puede demostrar la cuestión pedida.

Considerando las funciones $g(x) = sen\ x$ y $h(x) = x - 2$; la existencia de un punto P de corte demuestra lo pedido.



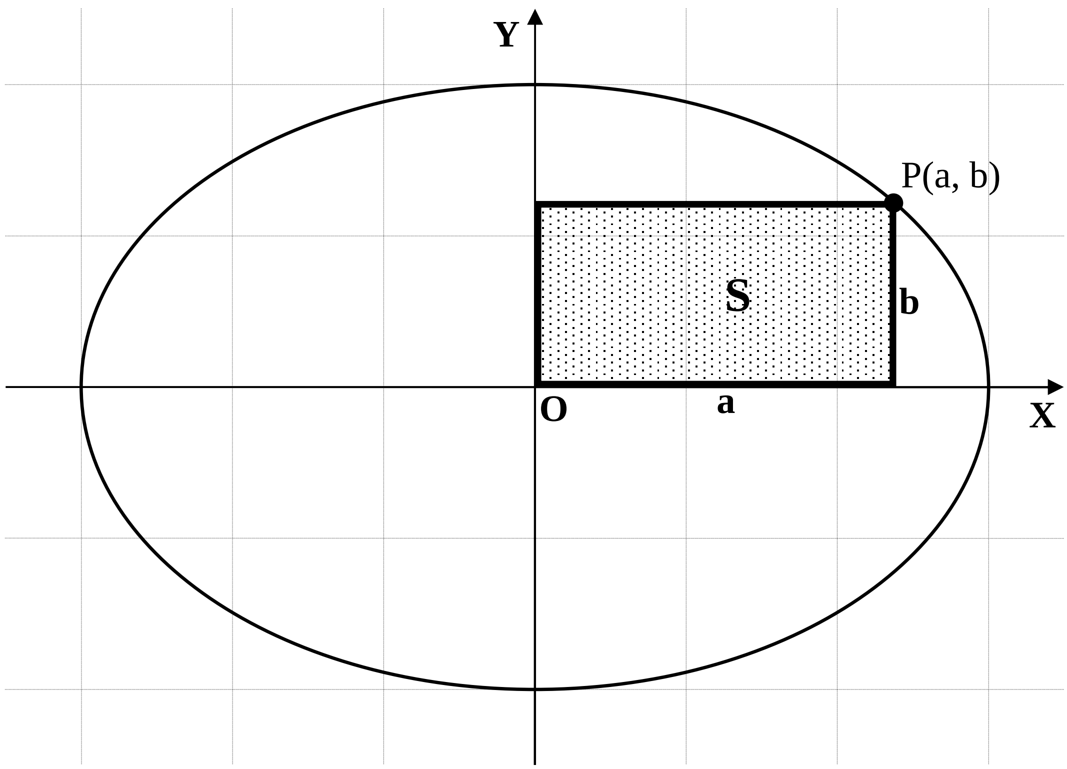
****

2º) Encontrar el valor máximo que puede tener el área de un rectángulo sabiendo que tiene dos lados sobre la parte positiva de los ejes de coordenadas y que el vértice no situado en estos lados está sobre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

La ecuación de una elipse cuyo centro coincide con el origen de coordenadas y los ejes principal y secundario se encuentran sobre los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente, es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

La elipse dada tiene como parámetros a = 3 y b = 2.

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



El valor de la superficie del rectángulo es $S=a\cdot b$, que tiene que ser máxima, por lo que su derivada tiene que anularse.

Por pertenecer el punto P(a, b) a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ tiene que satisfacer su ecuación, por lo cual: $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$. Expresando b en función de a es.

$$4a^2+9b^2=36\ \ ;;\ \ 9b^2=36-4a^2\ \ ;;\ \ b^2=\frac{36-4a^2}{9}\ \ ;;\ \ b=\sqrt{\frac{36-4a^2}{9}}=\underline{\frac{\sqrt{36-4a^2}}{3}=b}$$

Sustituyendo este valor en el área:

$$S = a \cdot b = a \cdot \frac{\sqrt{36-4a^2}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{36a^2-4a^4} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9a^2-a^4}$$

$$S' = \frac{2}{3} \cdot \frac{18a-4a^3}{2\sqrt{9a^2-a^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9-2a^2}{\sqrt{9-a^2}} = 0 \Rightarrow 9-2a^2 = 0 \;\;;;\;\; 2a^2 = 9 \;\;;;\;\; a = \frac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2} = a}$$

$$b = \frac{\sqrt{36-4a^2}}{3} = \frac{\sqrt{36-18}}{3} = \frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \underline{\sqrt{2} = b}$$

$$S = a \cdot b = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{3\ u^2 = S}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$. Demostrar que es continua en R y que tiene un mínimo para un valor de la función de $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Considerando el discriminante de la raíz, resulta que:

$$\underline{x^2+x+2=(x+1)^2+1>0,\ \forall x\in R}$$

De lo anterior se deduce que el dominio de f(x) es R, c. q. d.

Una función tiene un mínimo relativo para los valores de x que anulen la segunda derivada y que, para esos valores, la segunda derivada es positiva.

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}=0\Rightarrow\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}=0\ ;;\ 2x+1=0\ ;;\ \underline{x=-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(2\sqrt{x^2+x+2}\right)-(2x+1)\cdot 2\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}{\left(2\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{x^2+x+2}-\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+2}}}{4\left(x^2+x+2\right)}=$$

$$=\frac{4\left(x^2+x+2\right)-\left(4x^2+4x+1\right)}{4\left(x^2+x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{4x^2+4x+8-4x^2-4x-1}{4\left(x^2+x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{7}{4\left(x^2+x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+x+2}}=$$

$$=\underline{\frac{7\sqrt{x^2+x+2}}{4\left(x^2+x+2\right)^2}=f''(x)}$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{7\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2}}{4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{7\sqrt{\frac{1-2+8}{4}}}{4\left(\frac{1-2+8}{4}\right)^2}=\frac{7\sqrt{\frac{7}{4}}}{4\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{\frac{7\sqrt{7}}{2}}{\frac{4\cdot 7^2}{4^2}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Mínimo},\ c.q.c.}}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{1-2+8}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Mínimo}\ \Rightarrow\ P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)}}$$

****

4º) Estudiar la posición relativa de los siguiente cuatro planos: $\begin{cases} 7x+8y-z=0 \\ x-y=-4 \\ 2x+3y-5z=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$

Teniendo en cuenta los vectores normales de los cuatro planos se observa que no existen planos coincidentes ni paralelos.

Una forma de estudio es considerar dos pares de planos, que cada uno de ellos determina una recta, así, los dos primeros determinan la recta r y los dos últimos determinan la recta s. Estudiamos ahora la posición relativa de las rectas.

Las dos rectas determinan un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que según los rangos de las matrices de coeficientes M y ampliada M' se tiene:

Si Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ Rectas coincidentes.

Si Rango M =2 y Rango M' = 3 $\Rightarrow$ Rectas paralelas.

Si Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ Rectas secantes (se cortan en un punto).

Si Rango M = 3 y Rango M' = 4 $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Veamos cuál es el rango de M':

$$|M'|=\begin{vmatrix} 7 & -8 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \to C_2 - C_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & -15 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Desarrollando por los elementos de la última fila:

$$|M'|=-1\cdot\begin{vmatrix} -15 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=4-300-2=-298\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=4}$$

Por ser Rango M = 3 y Rango M' = 4, las rectas se cruzan.

Teniendo en cuenta que no existen planos ni coincidentes ni paralelos, la posición relativa de los cuatro planos es que:

Los planos se cortan dos a dos

****